Funktionale Abhängigkeiten verstehen Gestaltung eines Längsschnitts von der 1. bis zur 8. Klasse

Franz Embacher

Fakultät für Physik der Universität Wien http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Vortrag auf der Lehrerfortbildungstagung der ÖMG Fakultät für Mathematik der Universität Wien. 13. 4. 2007

Abstract

Innovativer Mathematikunterricht kann sich heute vor allem zweier Methoden bedienen, die auf Entwicklungen und Erfahrungen der vergangenen Jahrzehnte beruhen: Einerseits stehen elektronische Werkzeuge, interaktive Lernmedien und die Technologie zur Gestaltung und Nutzung derartiger Lernhilfen mehr oder weniger allgemein zur Verfügung. Andererseits wurden in der Vergangenheit zahlreiche methodisch-didaktische Ansätze eines schülerInnenzentrierten, eigenverantwortlichen Unterrichts entwickelt und von engagierten KollegInnen in die Praxis umgesetzt. Weiters wurden Anstrengungen unternommen, diese beiden Methodenbereiche systematisch zu kombinieren.

Konkrete Anwendungen beschränken sich aber in der Praxis meist auf isolierte, zeitlich beschränkte, in "herkömmliche" Unterrichtsformen eingebettete Phasen. Dies wirft einige Probleme auf: Besitzt der Einsatz "Neuer Medien" und "Neuer Lernkultur" den Charakter eines "Zusatzaufwands" für LehrerInnen und SchülerInnen, so berührt er die zentralen Lerninhalte und Lernziele bestenfalls am Rande und geht an den Hauptproblemen des Mathematikunterrichts vorbei – die mit diesen Techniken anvisierten Vorteile werden nicht ausgeschöpft. Zudem ist dann eine Evaluation der eingesetzten Techniken im Hinblick auf die im Unterricht zu erwerbenden Kompetenzen (die durch die gegenwärtige Entwicklung und Etablierung von Bildungsstandards hinreichend expliziert werden) besonders schwierig.

Vor diesem Hintergrund erscheint die Notwendigkeit der Entwicklung *langfristig* angelegter, durchgängiger Unterrichtsformen als besonders wichtig. Im Rahmen der Initiative *Medienvielfalt im Mathematikunterricht* (http://www.austromath.at/medienvielfalt/) wird die Gestaltung exemplarischer "Längsschnitte" für einen mediengestützten und schülerInnenzentrierten Unterricht (von der 1. bis zur 8. Klasse) in Angriff genommen. Anhand des thematischen Beispiels "Funktionale Abhängigkeiten" wird gezeigt, auf welche bisherigen Materialien, Konzepte und Erfahrungen dabei zurückgegriffen werden kann und welche Perspektiven sich für die mathematische Begriffsbildung, die Exaktifizierung von Denkmodellen und die Vernetzung gelernter Inhalte ergeben.

Werkzeuge und Medien, Lernkultur, Lernpfade und langfristige Planung

Bis vor einigen Jahren standen dem Mathematikunterricht (im deutschsprachigen Bereich) vor allem zwei innovative Methodenstränge zur Verfügung: In Bereich der Nutzung elektronischer *Werkzeuge und Medien* konzentrierte sich die Entwicklung auf interaktive Visualisierungen ("Applets") zur Verdeutlichung einzelner Begriffe und Zusammenhänge, auf erläuternde Hintergrundtexte, interaktive Tests sowie auf den systematischen Einsatz mathematischer computergestützter Technologien (wie dynamische Geometrie und Computeralgebra). Auf der Ebene der *Lernkultur* wurde mit methodisch-didaktischen Ansätzen wie "Offenes Lernen" und "Eigenverantwortliches Arbeiten" neue Wege eines schülerInnenzentrierten Unterrichts beschritten.

Die vergangenen Jahren sahen eine Reihe von Bemühungen, diese beiden Stränge miteinander zu kombinieren und so die Integration längerer "projektartiger" Lernphasen in

den Mathematikunterricht zu erleichtern. In Österreich wurde diese Entwicklung insbesondere durch die Kooperation der drei Initiativen

- → mathe online http://www.mathe-online.at/
- → ACDCA http://www.acdca.ac.at/
- → GeoGebra http://www.geogebra.org/

im Projekt

→ Medienvielfalt im Mathematikunterricht http://www.austromath.at/medienvielfalt/

und die Mitarbeit weiterer, mit den Methoden der Neuen Lernkultur erfahrenen KollegInnen repräsentiert. Die in seinem Rahmen entwickelten Lernmaterialien und Ansätze stellen in inhaltlicher und methodisch-didaktischer Hinsicht eine gute Grundlage für Überlegungen zu langfristiger Unterrichtsplanung dar.

Die äußere Form der (allen interessierten KollegInnen sowie den SchülerInnen zur Verfügung stehenden) Materialien des Medienvielfaltsprojekts ist jene des *Lernpfads*. Dieses im Mathematikbereich ursprünglich im Rahmen von <u>mathe online</u> entwickelte Konzept [1] bedeutete ursprünglich einfach "eine Abfolge von Hinweisen auf und Anmerkungen zu digitalen Ressourcen", die (mit Hilfe eines in technischer und didaktischer Hinsicht völlig offenen) Tools von allen NutzerInnen erstellt werden konnte, um einen "Pfad" durch den mit dem WWW zur Verfügung stehenden "Pool" an Einzelressourcen zu legen und auf diese Weise Lernprozesse zu organisieren. (Siehe <a href="http://www.mathe-online.at/lernpfade/für die zur Verfügung stehenden Lernpfade von <u>mathe online</u>).

Dieses Konzept wurde im Rahmen des Projekts Medienvielfalt im Mathematikunterricht insofern weiterentwickelt, als den entwickelten 14 Lernpfaden (zu ausgewählten Themen, gestreut von der 2. bis zur 8. Klasse) ausführliche methodisch-didaktische Anmerkungen beigefügt wurden. (Die Ergebnisse eines umfangreichen Praxiseinsatzes dieser Materialien sowie einer internen und einer externen Evaluation sind in dem von der Homepage abrufbaren Rechenschaftsbericht nachzulesen). An zahlreichen Stellen des Ablaufs wurden schülerInnenzentrierte Lernformen vorgeschlagen, so dass die Arbeit mit einem Lernpfad nun nicht mehr notwendigerweise "reine Computerarbeit" ist, sondern auch (unter anderem) Stationenbetriebe, Lernspiralen und den Wechsel der Sozialform umfasst. Allgemeine Hinweise zu den eingesetzten Methoden sowie Tipps für die Umsetzung (z.B. für die Dokumentation, d.h. die schriftliche Sicherung des Gelernten durch die SchülerInnen) sind auf der Homepage unter dem Punkt "Methoden" zusammengestellt.

Im Laufe des letzten Jahres wurden von der deutschen Initiative "Pentragramm-Gruppe" (die mit dem Medienvielfaltsprojekt kooperiert) unter http://www.zum.de/wiki/index.php/Pentagramm-Projekt Lernpfade auf Wiki-Basis erstellt. Diese technische Realisierungsform hat – ähnlich wie die Lernpfade von matheta-nime von matheta-nime des Medienvielfaltsprojekts den Vorteil, dass ein Lernpfad von jedem Lehrer/jeder Lehrerin kopiert und den eigenen Bedürfnissen angepasst werden kann. Unter http://www.mathematik-digital.de/ entsteht eine umfangreiche, nach Lehrplänen geordnete Sammlung von Links zu geeigneten Ressourcen (mit Berücksichtigung der österreichischen Schultypen und Lehrpläne).

Insgesamt steht unter den bisher angegebenen Web-Adressen eine große Menge an Material zu den meisten schulrelevanten mathematischen Themen zur Verfügung, von "kleinen" Visualisierungen bis zu "großen" Lernpfaden, mit und ohne mitgelieferte methodisch-didaktische Umsetzungsvorschläge und Lernformen.

Die zeitliche Dauer der einzelnen Lernpfade des Medienvielfaltsprojekts wurde mit *einigen Unterrichtsstunden* veranschlagt. Wiewohl dies – je nach Betrachtungsweise – als sehr kurz oder sehr lang erachtet werden kann, stellen Lernpfade dieser Größenordnung eine gute Ausgangsbasis für eine *langfristige Unterrichtsplanung* dar:

- Eine "projektartige" Unterrichtsphase von einigen Stunden (vielleicht bis maximal einigen Wochen in den höheren Klassen) erscheint den betroffenen SchülerInnen (und LehrerInnen) akzeptabel.
- Ein Lernpfad wird lange genug bearbeitet, um eine gewisse Vertrautheit mit den gelernten Inhalten, den eingesetzten Werkzeugen und den angewandten Methoden zu erzeugen.
- Einzelne (auch ansonsten "isolierte") Themen, Techniken und Ressourcen können in Lernpfade eingebettet werden. Der Lernpfad (als Abfolge von Arbeitsanweisungen, die in gewisser Weise die "Stimme der Lehrperson" darstellt) steht langfristig (vorzugsweise im Web) zur Verfügung.
- Die Dokumentation der SchülerInnen zu einem Lernpfad kann leicht in einer Weise erfasst und archiviert werden, dass auch sie langfristig zur Verfügung steht.

Damit sind mehrere Möglichkeiten gegeben,

- bestimmte Formen des Arbeitens in übersichtliche, von Zeit zu Zeit stattfindende Phasen einzubetten und dadurch zu einem langfristigen Bestandteil des Unterrichts zu machen, sowie
- bewusst "Anschlusspunkte" zu setzen, die an früher Gelerntes anschließen bzw. zu einer späteren Zeit wieder aufgenommen werden können (z.B. durch eine geeignete Planung der schriftlichen Fixierung des Gelernten, etwa in Form von Ausarbeitungen, Reflexionen und Formelsammlungen).

Zusätzliche Tools, die bereits vielfach eingesetzt werden (wie *Lernplattformen* und *Content-Management-Systeme*) oder derzeit in den Blickpunkt der Aufmerksamkeit rücken (wie *ePortfolios*) sowie individuelle oder schulspezifische Lösungen können diese Prozesse und die für sie notwendigen Planungen unterstützen.

Der Sinn einer langfristigen Orientierung besteht *nicht* darin, den Unterricht mit so vielen Stationenbetrieben und Computerstunden anzureichern wie möglich. Sie reflektiert einfach die Tatsache, dass das Lernen (auch das Lernen von Mathematik) ein langfristiger Prozess ist. Erst durch sie können fachdidaktischen Prinzipien (von denen im Folgenden noch die Rede sein wird) voll ausgeschöpft werden. Digitale Medien und die Neue Lernkultur sind nicht die einzigen Ingredienzien einer solchen Orientierung (sie sind nicht einmal *notwendig* dafür, geschweige denn *hinreichend*), aber sie bieten eine Reihe neuer Möglichkeiten sowohl für LehrerInnen als auch für SchülerInnen.

Funktionale Abhängigkeiten im Mathematikstoff

Eines der nützlichsten Konzepte zur Unterrichtsgestaltung ist das so genannte (auf Jerome Bruner zurückgehende) Spiralprinzip [2], in der Didaktik der Mathematik als die Buchbergersche Kreativitätspirale [3][4] bekannt: Mathematische Ideen, Themenstellungen und Methoden werden des Öfteren *wieder*aufgenommen, aber jedes mal mit einem Lernziel auf einer höheren Stufe verbunden (d.h. beispielsweise mit einer höheren

Abstraktionsebene, exakter argumentiert als zuvor, mit vermehrten Vernetzungen zu anderen Teilgebieten,...).

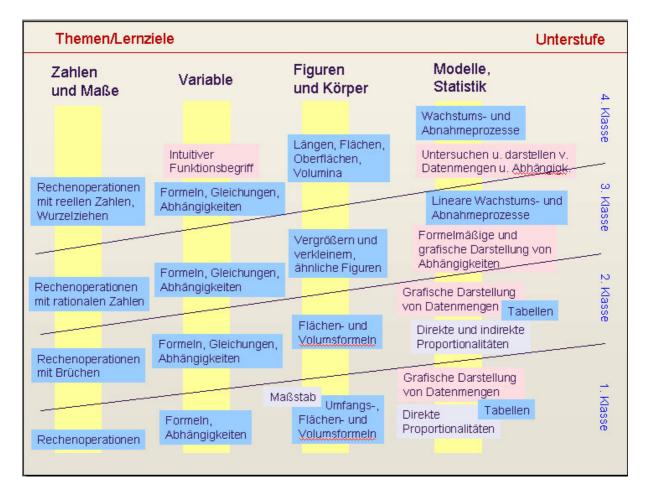
Ein schönes Beispiel für eine Anordnung von Stoffgebieten nach diesem Prinzip bietet der österreichische Mathematik-Lehrplan für die Unterstufe. Die vier Generalthemen

- Zahlen und Maße
- Variable
- Figuren und Körper
- Modelle und Statistik

werden in jedem Jahr wiederaufgenommen und weiterentwickelt. Der Passus

durch das Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten einen intuitiven Funktionsbegriff erarbeiten

im Lehrplan für die vierte Klasse verweist auf die erneute Wiederaufnahme des Abhängigkeitsthemas in der Oberstufe.



Themen und Lernziele des Lehrplans für die Unterstufe, mit besonderen Bezügen zum Thema funktionale Abhängigkeiten

Tatsächlich werden aber nicht nur die vier Generalthemen für sich wieder aufgenommen, sondern es wird in vielfältiger Hinsicht auf dem zuvor Gelernten aufgebaut, so dass der Lehrplan eher ein *Netz* von Bezügen darstellt.

Obwohl der Lehrplan für die Oberstufe nicht exakt in der gleichen Weise formuliert ist, liegt die Bedeutung der gleichen Prinzipien auf der Hand. Die Vernetztheit der Themen ist hier sogar stärker ausgeprägt. Abgesehen davon, dass fast jedes mathematische Thema unter dem Blickwinken funktionaler Abhängigkeiten betrachtet werden kann, zeigen Formulierungen wie

- → Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen (5. Klasse)
- → Anwenden von Funktionen zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse, Vergleichen von Modellen, Erkennen der Grenzen von Modellbildungen (6. Klasse)
- → Kennenlernen von Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs (6. Klasse)
- → umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten (8. Klasse)

die reichhaltigen Möglichkeiten der Wideraufnahme und Vernetzung von Themen, die sich hier ergeben.

Da nicht *jede* mögliche Verbindung zweier Themen durchgeführt werden kann, müssen entsprechende Schwerpunkte gesetzt werden, die sich wiederum am vorhandenen Angebot aus Ressourcen, Werkzeugen und Lernformen orientieren können. In Verschränkung mit der Weiterentwicklung der *stofflich-inhaltlichen Kenntnisse* der SchülerInnen ist auch der Zuwachs an *Kompetenzen* zu sehen, insbesondere

- → allgemeine kognitive Leistungsfähigkeit
- → Reproduzieren, Anwenden
- → Modellieren, Argumentieren, Interpretieren
- → Zusammenhänge herstellen, Vertiefen (z.B. das Öffnen von Black-Boxes [3][4]), Verallgemeinern, Exaktifizieren
- → Sprachkompetenz
- → Umgang mit Texten (lesen, schreiben)
- → Werkzeugkompetenz

Auch was den Einsatz von Lern- und Sozialformen betrifft, etwa bei solchen, die Sprachkompetenz erfordern, kann die altersadäquate Weiterentwicklung nach dem Spiralprinzip angedacht werden.

Darstellungsformen und Prototypen

Mathematische Objekte wie Funktionen werden zunächst als "Prototypen" (z.B. Darstellungsformen) kennen gelernt, bevor ihr Eigenleben als – mehr oder weniger abstrakte – Begriffe beginnt. Beispiele für Prototypen des Funktionsbegriffs sind

- → Tabelle
- → Wortformel
- → Graph
- → Zuordnungsdiagramm
- → Formel (Term, "Funktionsgleichung")
- → (Computer-)Programm
- → rekursives Modell
- → DynaGraph

Durch das Verstehen der inneren Logik eines Prototypen, der Fähigkeit, Prototypen zu finden, zwischen Prototypen wechseln und mit Prototypen Probleme lösen wird der allgemeine Funktionsbegriff vorbereitet und vertieft. Prototypen werden in unterschiedlichem Maß durch elektronische Werkzeuge unterstützt (z.B. Tabelle und Graph) bzw. überhaupt erst möglich.

Ein Beispiel für letzteres ist der *DynaGraph*-Prototyp, der im Rahmen von <u>mathe online</u> auf eine Vielzahl von Themen (von der 1. bis zur 8. Klasse und darüber hinaus) angewandt wurde. Die im folgenden aufgezählten interaktiven Lerneinheiten decken jeweils nur einen kleinen Bereich ab, in welchem sie funktionale Abhängigkeiten sichtbar machen und die Bildung und Vertiefung des Funktionsbegriffs (nach dem Motto: eine interaktive Animation sagt mehr als tausend Bilder) und die Problemlösekompetenz unterstützen [5]. Insgesamt bilden sie eine die gesamte gymnasiale Ausbildung durchziehende Darstellungsform von Funktionen und funktionalen Abhängigkeiten, die für die langfristige Unterrichtsplanung (daher auch zur Einfügung in Lernpfade und zur Umsetzung mittels verschiedener Lernformen) zur Verfügung steht:

- → Der Zahlenstrahl
 - http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/zahlenstrahl/zahlenstrahl.html
- → Zahlen und die Zahlengerade
 - http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/zahlen/zahlen.html
- → Rechenoperationen mit ganzen Zahlen

 http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/rechenoperationenG/rechenoperationenG.html
- → Rechenoperationen
 http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/rechenoperationen/rechenoperationen.html
- → Potenzen
 - http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/potenzen/potenzen.html
- → Der Mittelwert am Zahlenstrahl <a href="http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/mittelwertZstr/mittelwe
- → Was ist der Mittelwert?

 http://www.mathe-opline.at/materialien/Franz Embacher/files/mittelwert/mittelwert.html
- http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/mittelwert/mittelwert.html

 Lineare Gleichung
- http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/lineareGleichung/lineareGleichung.html
- → Funktionale Abhängigkeiten verstehen (*DynaGraph*) http://www.mathe-online.at/galerie/fun1/fun1.html#FunktAbh
- → Ableitungen messen
 http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ablMess
- → Partielle Ableitungen messen http://www.mathe-online.at/galerie/partdiff/partdiff.html#partAblMess
- → Lineare Abbildung http://www.mathe-online.at/galerie/linalg/linalg.html#lineareAbbildung

Diese Lernhilfen werden gemeinsam mit modellhaften Aufgabenstellungen angeboten (die im Rahmen von Lernpfaden durch jeweils eigene Aufgabenstellungen ersetzt werden können) und sind zum Teil mit Kommentaren zum jeweiligen didaktischen Hintergrund versehen. Die "Konstanz der Darstellungsform" (neben anderen) über mehrere Jahre hinweg kann auf diese Weise die Fähigkeit schulen, mathematische Strukturen unter verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten.

Die Rolle des Werkzeugs

Eine besondere Rolle kommt der "Konstanz des Werkzeugs" zu. Ob es sich nun um die systematische Integration von Computeralgebra und/oder Tabellenkalkulation handelt oder ob auf einzelne spezialisierte Werkzeuge zurückgegriffen wird: Die *regelmäßige* Verwendung bestimmter Tools kann die SchülerInnen bei der Begriffsbildung, dem Aneignen und Verstehen mathematischer Methoden und beim *Aufbringen des* zum Erschließen neuer Themen nötigen *Transferwissens* unterstützen.

Eine Form von Abhängigkeit, die besonders gut von elektronischen Werkzeugen dargestellt werden kann, ist jene einer Funktionenschar von einem Parameter (das SchülerInnen in der Regel als Abhängigkeit eines Funktionsgraphen von einem Parameter wahrnehmen). Ein Beispiel dafür ist der

→ Excel-Plotter

http://www.mathe-online.at/ (Link auf der Welcome Page)

Als Werkzeug, das während der verschiedenen Stufen des Lernprozesses (ab der 4. Klasse) eingesetzt wird und den SchülerInnen vertraut ist, kann dieses Tool schließlich zur Lösung durchaus nichttrivialer Aufgabenstellungen auf einem ansonsten schwer erreichbaren Abstraktionsniveau verwendet werden.

Fächerübergreifende Bezüge

Ist den SchülerInnen die Form des Lernpfads vertraut, so lassen sich auch fächerübergreifende Bezüge, die oft besondere Schwierigkeiten bieten, leichter in die Planung einbeziehen, durchführen und gegebenenfalls später wieder aktualisieren. Als Beispiele für die Oberstufe seien die beiden Lernpfade

- → Die harmonische Schwingung (Bezüge zum Physikunterricht) http://www.mathe-online.at/lernpfade/harmonischeSchwingung/
- → Beschreibung von Bewegungen (Bezüge zum Physikunterricht) http://www.mathe-online.at/lernpfade/Bewegungen/

genannt, die die besondere *Abhängigkeit von der Zeit* thematisieren und gleichzeitig einen Berührungspunkt mit der in der Physik üblichen Sprache und Bezeichnungsweise darstellen. Lernpfade wie diese (die permanent zur Verfügung stehen) mögen auch die Absprache und zeitliche Koordinationen von KollegInnen, die eine Klasse in verschiedenen Fächern unterrichten, erleichtern.

Nachhaltigkeit und Evaluation

Ein besonderes Problem des Unterrichts ist die (im System wenig angelegte) langfristige Überprüfung des Lernertrags. Um möglichst gezielt zu testen, was und wie viel von den in einer bestimmten Phase gelernten Inhalten nach einer längeren Zeit noch gewusst und gekonnt wird, ist ebenfalls eine langfristige Planung nötig. Eine solche Überprüfung soll weniger der Beurteilung der SchülerInnen dienen als jener des bisherigen Unterrichts, der eingesetzten Methoden, Ressource und Werkzeuge und deren Vernetzung. Sie sollte daher eher "Evaluation" genannt werden als "Test".

Zur Abschwächung dieses Problems wurde vorgeschlagen, mit einzelnen Lernpfaden Vorlagen einer einige Monate später durchzuführenden Evaluation – etwa nach Art der Standardtests – mitzuliefern. Zur Zeit ist diese Variante (und ihre technischen Umsetzung) noch im Gespräch, wird aber möglicherweise bald realisiert werden. Wichtig erscheint in diesem Zusammenhang, dass Nachhaltigkeitsevaluationen die SchülerInnen nicht vor *neue* Situationen stellen, keine Prüfungssituationen darstellen und relativ schnell durchzuführen sind.

Bis zur Lösung dieses Problems mögen – sofern auf bereits existierende Ressourcen zurückgegriffen wird – die bekannten (nicht auf einzelne Lernpfade zugeschnittenen) interaktiven Tests wie etwa in http://www.mathe-online.at/tests.html oder in zahlreichen anderen Websites dienen.

Ausblick

Damit wurde im Überblick skizziert, auf welche Materialien, Konzepte und Erfahrungen bei der langfristigen Unterrichtsplanung zurückgegriffen werden kann und welche Perspektiven sich durch die Einbeziehung digitaler Medien, Werkzeuge und Lernformen ergeben.

Zum Abschluss sei der Hoffnung Ausdruck gegeben, dass in einer (bereits beantragten) Fortsetzung des Projekts Medienvielfalt im Mathematikunterricht dieses Thema weiterhin bearbeitet und die systematische Erarbeitung von Vorschlägen für planerische "Längsschnitte" durch den Mathematikunterricht sowie die Installierung eines Rückmeldesystem zur Erfassung der im Test gewonnenen Erfahrungen begonnen werden kann.

Literatur

- [1] Franz Embacher: Lernpfade Wegen zu selbstgesteuertem Lernen. Online: http://www.mathe-online.at/monk/TU26.2.2004/. Für weitere Literatur siehe http://www.mathe-online.at/literatur.html.
- [2] Jerome Bruner, Der Prozess der Erziehung. Pädagogischer Verlag Schwann, Berlin, Düsseldorf 1976.
- [3] Bruno Buchberger: Should Students Learn Integration Rules? RISC-Linz, 1989.

 Online: http://delivery.acm.org/10.1145/1100000/1095228/p10-buchberger.pdf?key1=1095228&key2=0818344711&coll=&dl=ACM&CFID=15151515 &CFTOKEN=6184618.
 - Bruno Buchberger: Teaching Math by Software. RISC-Linz, 1992.
- [4] Helmut Heugl, Walter Klinger and Josef Lechner: Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen, Addison-Wesley, Bonn, Massachussetts 1996. Online: http://www.acdca.ac.at/material/allgem/buch/buch96.htm.
- [5] Franz Embacher: The didactical significance of interactive animations. In: Josef Böhm (ed.), Proceedings/Tagungsband DES-TIME-2006, bk teachware Schriftenreihe Nr. SR-54 (CD-ROM), ISBN 3-901769-74-9. Online: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/DES-TIME-Dresden-20.-23.7.2006/.